MATH - F - 102 - Théorie

A.2. Les ensembles

→ Un ensemble est un "rassemblement" d'éléments.

Si X est un ensemble et x un élément de X, alors

$x \in X$

↳ si x n'est pas un élément de X, alors $x \notin X$

→ Ensemble vide : $X = \emptyset$

→ Ensemble avec un élément unique : singleton

→ Si X contient un nombre fini d'éléments, alors X est un ensemble fini. Le nombre d'éléments est appelé cardinalité de X : $|X|$ ou $\# X$

→ Si bcp d'éléments, on peut écrire : ex : $V = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 5\}$

ex : $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

→ $\forall$: pour tout → $\exists$: il existe

→ $\exists!$: il existe un unique

A.3 Construction sur les ensembles

① Soient X et Y des ensembles.

→ Y est un sous-ensemble de $X \Leftrightarrow \forall x \in Y, x \in X$.

Alors $Y \subset X$ ou $Y \subseteq X$

→ Si $\exists y \in X$ tq $y \notin Y$, on écrit $Y \subsetneq X$

→ La différence entre X et Y : $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$

→ Réunion de X et Y : $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}$

↳ $X \cup Y = X \Leftrightarrow Y \subset X$

→ Intersection de X et Y : $X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\}$

→ Produit cartésien de X et Y : $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$

↳ $X \times X = \{(x, x') \mid x \in X \text{ et } x' \in X\}$

↳ $X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, \forall i = 1, \dots, n\}$

↳ $X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X, \forall i = 1, \dots, n\}$

A.4 Relation d'équivalence

- Une relation de X dans Y est un sous-ensemble R de l'ensemble produit : $R \subset X \times Y$
  - → Si $(x,y) \in R$, x est en relation avec y : xRy
  - → Si $(x,y) \notin R$; $x \not R y$.
- Une relation de X dans lui-même, càd $R \subset X \times X$, est
  - → symétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$, $xRy \Rightarrow yRx$
  - → antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$, xRy et yRx implique $x = y$
  - → transitive $\Leftrightarrow \forall x,y,z \in X$, xRy et $yRz \Rightarrow xRz$
  - → réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in X$, xRx
  - → complète $\Leftrightarrow \forall x,y \in X$, $x \not R y \Rightarrow yRx$
- Classe de relations :

→ ordre partiel : relation anti-symétrique, transitive et réflexive (+ complète → total)

→ ordre total : relation anti-symétrique, transitive et complète.

→ relation d'équivalence : symétrique, transitive et réflexive.

? - exemples : $\leq, \geq, <, >$ relation d'ordre total

- Soit X un ensemble, 2^X l'ensemble de tout les sous-ensembles de X. Alors $\subset$ est une R d'ordre partiel.

→ Soit X un ensemble et R une relation d'equivalence, $\forall x \in X$,

$$R_x = \overline{x} = \{y \in X \mid xRy\} \subset X$$

R_x est une classe d'equivalence.

↳ Si $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow R_x \cap R_y \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in \overline{x}$

Les classes d'eq. forment une partition de X : tout élément est contenu dans exactement 1 classe d'eq.

→ Ensemble quotient de X par R : $X/R = \{\overline{x} \mid x \in X\}$

Exemple : $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 = \{(a,b) \in X \mid a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$\overline{(a,b)} = \frac{a}{b}$; $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

A5. Applications, injection, surjection, bijection

- Une fonction f d'un ensemble X dans un ensemble Y est une relation $f \subset X \times Y$ qui satisfait $\forall x \in X$ et $y, y' \in Y$:

$$x f y \text{ et } x f y' \Rightarrow y = y'$$

↳ tout élément de x est en relation avec max 1 élément de Y.

↳ $f : X \to Y$

↳ Pour (x, y) dans f, $f(x) = y$

→ Pour une fonction f, on ne peut pas simplement inverser les rôles de X & Y.

- Pour une fonction, nous appelons domaine de f le sous-ensemble de X :

$$\mathrm{Dom} f = \{x \in X \mid \exists! y \in Y,\ f(x) = y\} \subset X$$

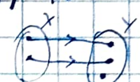
- L'image de f : $\mathrm{Im} f = \{y \in Y \mid \exists x \in X,\ f(x) = y\} \subset Y$
- Une application est une fonction $f : X \to Y$ avec $\mathrm{Dom} f = X$

? ↳ Tout fonction $f : X \to Y$ induit une app. $f : \mathrm{Dom} f \to Y$

- Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont 2 app., alors nous définissons

$$g \circ f : X \to Z,\ g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (\text{"}g \text{ après } f\text{"})$$

- **Définitions :** Une application $X \to Y$ est appelée :

$|X| \leqslant |Y|$ ① injective $\Leftrightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ 

$|X| \geqslant |Y|$ ② surjective $\Leftrightarrow$ si $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$ (ou $\mathrm{Im} f = Y$) 

$|X| = |Y|$ ③ bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective 

- Une permutation est une bijection de X dans X.
- **Définitions :** Soit $f : X \to Y$ une app. $\forall Z \subset Y$ nous définissons l'image inverse de Z sous f comme l'ensemble

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\} \subset Y$$

→ si f est injective, $f^{-1}(y)$ est $\emptyset$ ou un singleton

→ si f est surjective, $f^{-1}(y) \neq \emptyset \quad \forall y \in Y$.

→ si f est bijective, $f^{-1}(y)$ est une application inverse.

↳ $f^{-1} \circ f = id$ et $f \circ f^{-1} = id$